Sisième partie:

Mouvement relatif et changement de référentiel en mécanique newtonienne

Notions abordées:

- 6.1 Référentiel et repères
- 6.2 Vitesse et accélération relatives
- 6.3 Dynamique dans un référentiel en mouvement, forces d'inertie
- 6.4 Loi d'inertie et référentiels d'inertie
- 6.5 Dynamique terrestre

Buts:

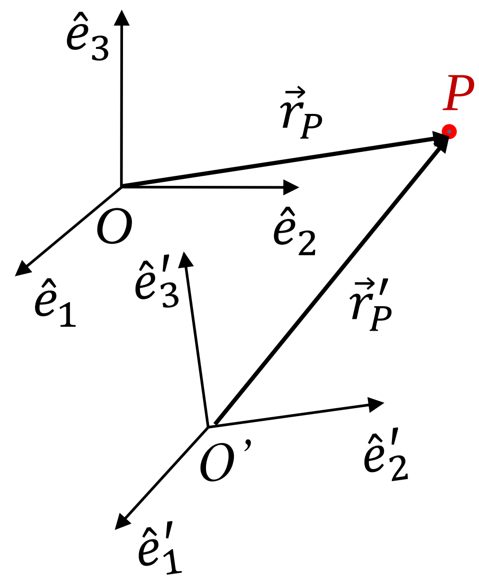
- comprendre la différence entre référentiel et repère
- comprendre la notion de référentiel d'inertie
- assimiler les bases de la mécanique Newtonienne classique

6.1 Mouvement et référentiel

- La description du mouvement d'un point matériel ou d'un système (vitesses, accélérations, forces, …) se fait nécessairement par rapport à un référentiel :
  - Référentiel = ensemble d'au moins 4 points non coplanaires et immobiles les uns par rapport aux autres (= solide indéformable !)
    - on peut associer à chaque référentiel un observateur et ses instruments de mesure, immobiles dans ce référentiel (ils « font partie » du référentiel)
    - décrire un mouvement dans un certain référentiel consiste alors à se mettre à la place de cet observateur
  - Exemples:
    - le laboratoire (= la Terre)
    - un carrousel
    - un ascenseur

- Le choix du référentiel est a priori arbitraire, mais …
  - … tous les référentiels sont-ils équivalents ?
  - … les lois de la physique sont-elles les mêmes dans tous les référentiels ?
  - … permettent-elles de mettre en évidence des référentiels privilégiés ?

6.1 Changement de référentiel



- Point matériel P décrit dans deux référentiels différents :
  - Dans un référentiel R auquel est lié le repère: $O\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3$

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,\hat{e}_i, \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}\hat{e}_i, \quad \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dv_i}{dt}\hat{e}_i$$

  - Dans un autre référentiel R' auquel est lié le repère : $O'\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$

$$\vec{r}_P' = \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^{3} x_i'\,\hat{e}_i', \quad \vec{v}_P' = \frac{d\vec{r}_P'}{dt'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt'}\hat{e}_i', \quad \vec{a}_P' = \frac{d\vec{v}_P'}{dt'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dv_i'}{dt'}\hat{e}_i'$$

- Postulats de la mécanique classique (non-relativiste):

1. Le temps est absolu :
2. L'espace est absolu :

$$\boxed{\begin{array}{l} t' = t + \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt'} = \dfrac{d}{dt} \\ \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}\,'_Q - \vec{r}\,'_P \qquad \forall P, Q \end{array}}$$

- Interval de temps et
- longueur

ne dependent pas du référentiel

- Conséquence:
  - un « solide » dans R est aussi un « solide » dans R'.
  - son mouvement est décrit par les vitesses instantanées de translation et de rotation de R' par rapport à R:

$$\boxed{\vec{v}_{O'} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}}$$

6.2 Transformation des vitesses

$$\underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{r}_P} = \underbrace{\overrightarrow{OO'}}_{\vec{r}_{O'}} + \underbrace{\overrightarrow{O'P}}_{\vec{r}'_P}$$

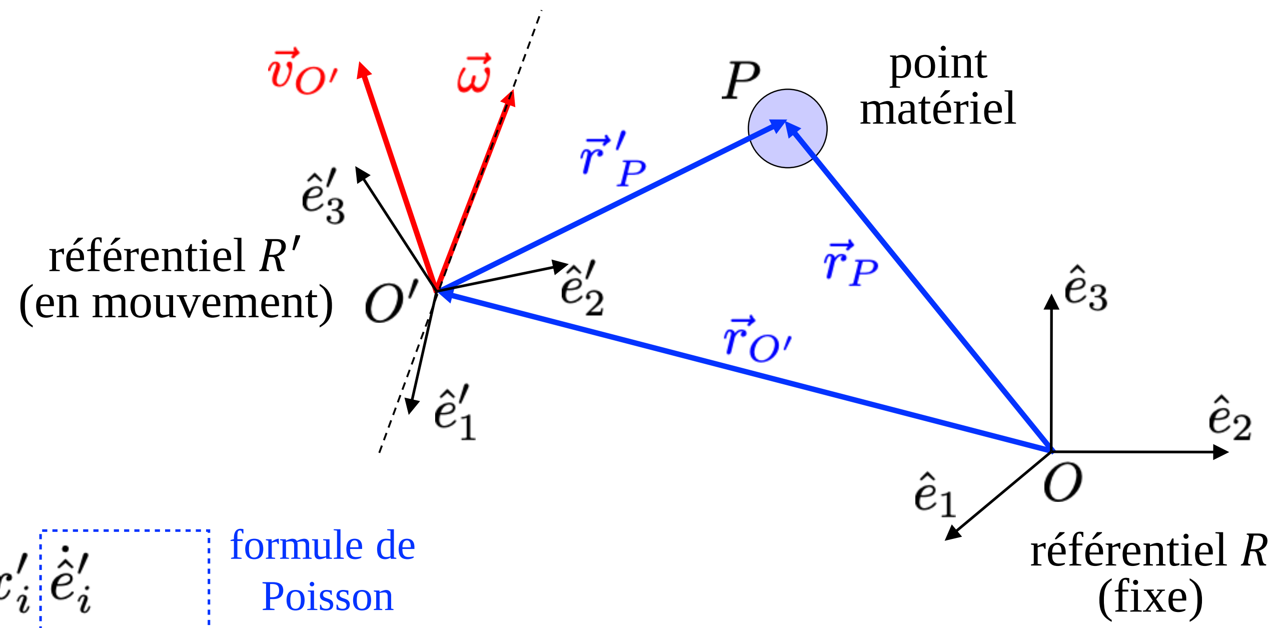
$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt}\sum x'_i\,\hat{e}'_i$$

$$= \vec{v}_{O'} + \sum \dot{x}'_i\,\hat{e}'_i + \sum x'_i\,\dot{\hat{e}}'_i$$

$$= \vec{v}_{O'} + \quad \vec{v}'_P \quad + \sum x'_i\,\vec{\omega}\wedge\hat{e}'_i$$

formule de Poisson



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}}_{\text{vitesse d'entraînement}}}$$

vitesse de P par rapport à R' (relative)

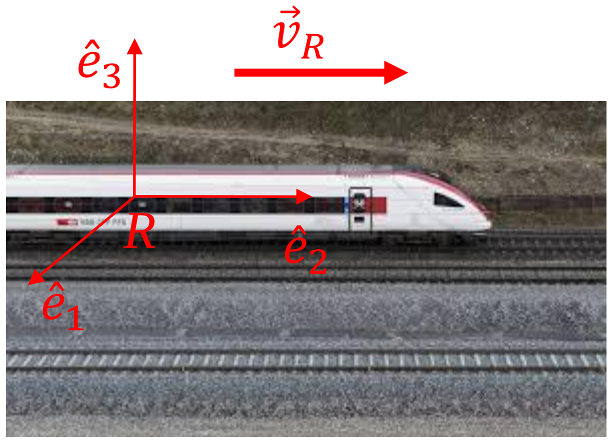
vitesse de P par rapport à R (absolue)

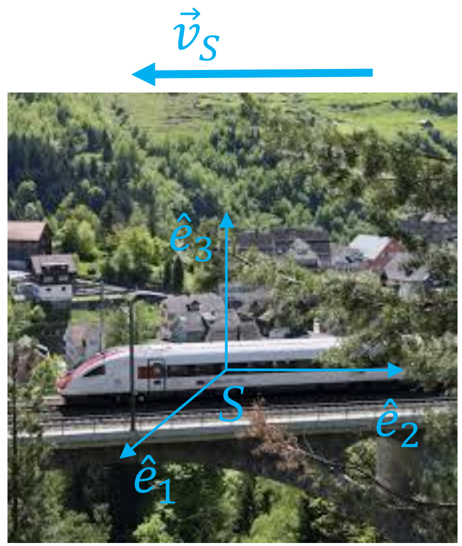
Cas particuliers :

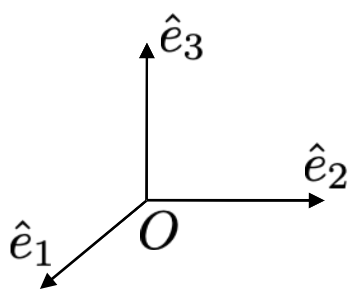
- Si $\omega = 0$, i.e. R' est en translation par rapport à R, on obtient la loi d'addition des vitesses :

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P}$$

6.2 Ex.: trains en mouvement





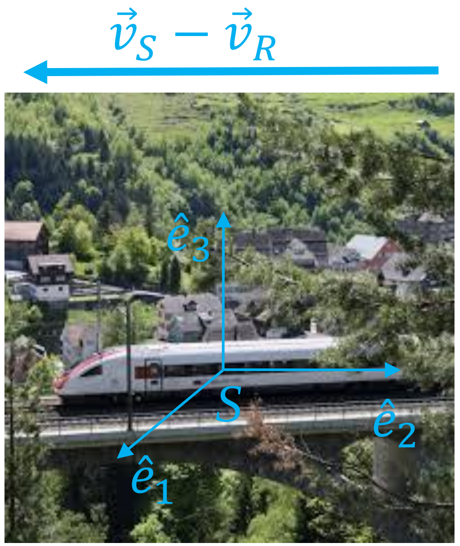


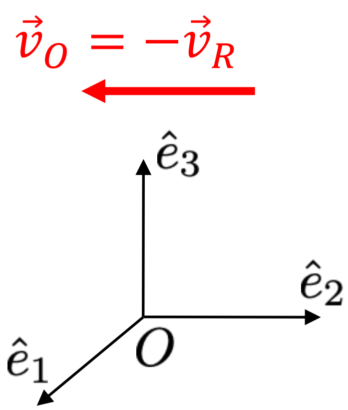
Observateur O à l'arrêt sur le quai

$\vec{v}_R$ et $\vec{v}_S$ sont les vitesses mesurées par l'observateur O

Par rapport à l'observateur R assis sur le train

$$\vec{v}_R = \vec{v}_O + \vec{v}_s$$





Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/216

6.2 Transformation des accélérations

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'_P}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_P &= \vec{a}_{O'} + \frac{d}{dt}\sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\sum x'_i \hat{e}'_i + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\
&= \vec{a}_{O'} + \sum (\ddot{x}'_i\, \hat{e}'_i + \dot{x}'_i\, \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \vec{\omega} \wedge \sum (\dot{x}'_i\, \hat{e}'_i + x'_i\, \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\
&= \vec{a}_{O'} + \underbrace{\sum \ddot{x}'_i\, \hat{e}'_i}_{\vec{a}\,'_P} + 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum \dot{x}'_i\, \hat{e}'_i}_{\vec{v}\,'_P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum x'_i\, \hat{e}'_i}_{\overrightarrow{O'P}}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}\,'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

accélération centripète

accélération de Coriolis

accélération d'entraînement

accélération de P par rapport à R' (relative)

accélération de P par rapport à R (absolue)

<u>Cas particuliers</u> : Si $\omega = 0$ et $d\omega/dt = 0$, i.e. R' est en translation par rapport à R, on obtient la loi d'addition des accélérations $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'}$

6.3 Dynamique dans un référentiel en mouvement

- Soit R un référentiel inertiel (= en mouvement rectiligne uniforme) dans lequel la deuxième loi de Newton est valable.
  - Pour le point matériel P, auquel s'appliquent des forces $\vec{F}^{ext}$: $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$

$$\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}_P = m\left(\vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

- Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a :

$$\boxed{m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} \overbrace{- \left(\underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P}_{\text{force de Coriolis}} + m\vec{a}_{O'} + \underbrace{m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}_{\text{force centrifuge}} + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}^{\sum \vec{F}^{inertie}}}$$

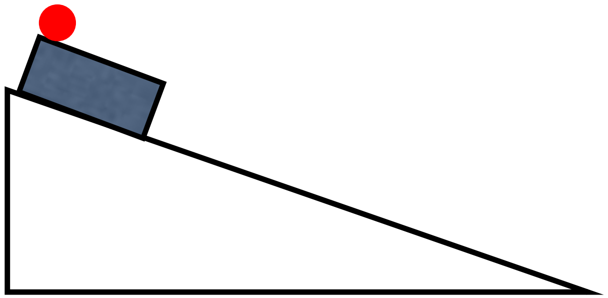
⚠ les "forces d'inertie" ne sont pas des vraies forces; il s'agit d'un concept introduit pour rétablir la loi $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$ dans les référentiels accélérés !

Si R' est aussi un référentiel inertiel, $\vec{\omega} = 0, \dot{\vec{\omega}} = 0$ et $\vec{a}_{O'} = 0 \rightarrow \quad m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext}$

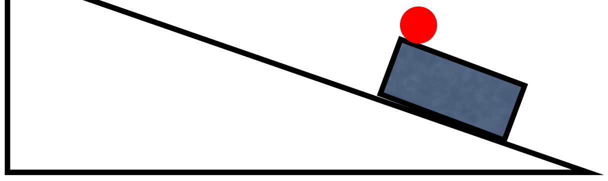
6.3 Ex.: rail à air

Considérons une bille (masse m) sur une glissière (masse M) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).

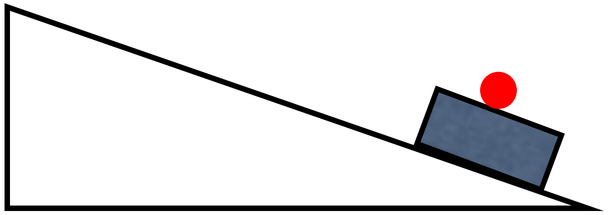
Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, que fait la bille?



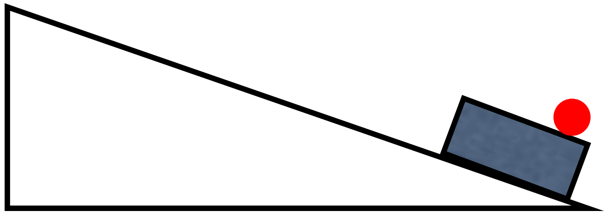
Quiz?



1)



2)

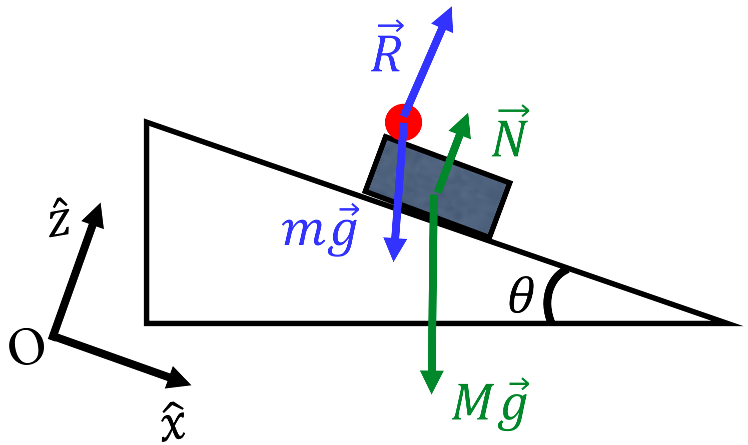


3)

6.3 Ex.: rail à air

Considérons une bille (masse m) sur une glissière (masse M) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).
Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, que fait la bille?

Référentiel inertiel



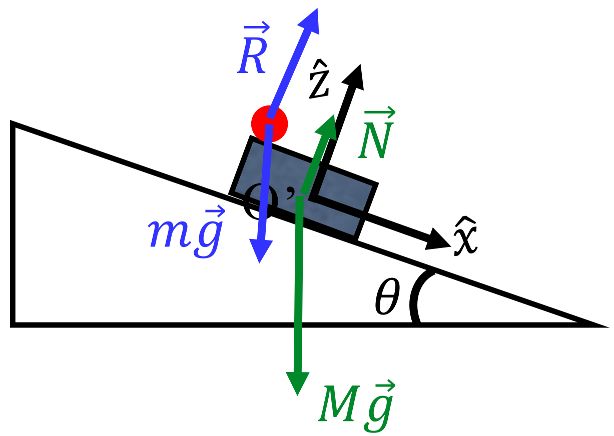
$$mg\sin\theta = ma$$

$$Mg\sin\theta = Ma$$

$$a = g\sin\theta$$

Les deux objets descends avec la même accélération et donc la bille ne bouge pas par rapport à la glissière

Référentiel accéléré



$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$$\hat{x}: \quad ma'_P = mg\sin\theta - ma = mg\sin\theta - mg\sin\theta = 0$$

La bille est à repos par rapport à la glissière

6.3 Référentiel en translation non-uniforme

- Poids apparent dans un ascenseur accéléré vers le haut :
  - On mesure le poids par l'extension du ressort
  - Dans le référentiel R' de l'ascenseur, la masse m est immobile :

$$\vec{a}'_P = 0$$

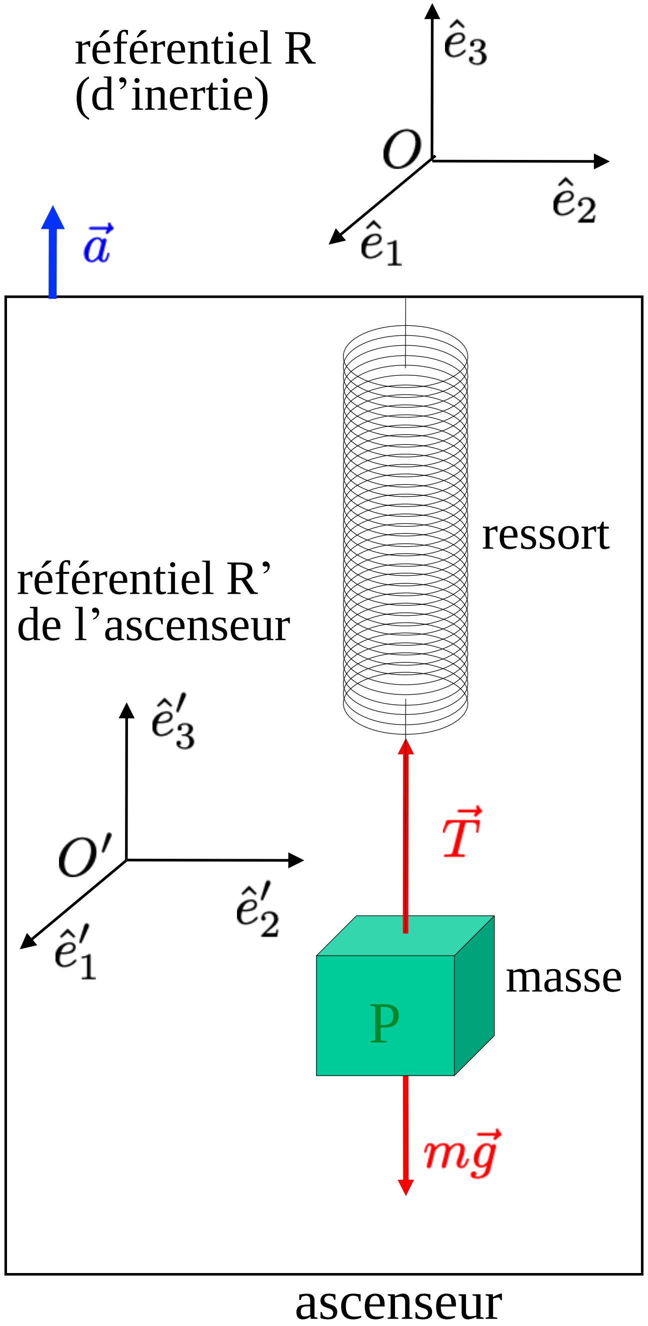
  - 2ème loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel R' :

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$$m\vec{a}'_P = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_{O'}$$

$$0 = T - mg - ma$$

$$T = m(g + a) \quad = \textbf{poids apparent}$$



Ex.: - astronaute écrasé contre le siège au départ de la fusée
- sensation de flotter si on tombe dans le vide

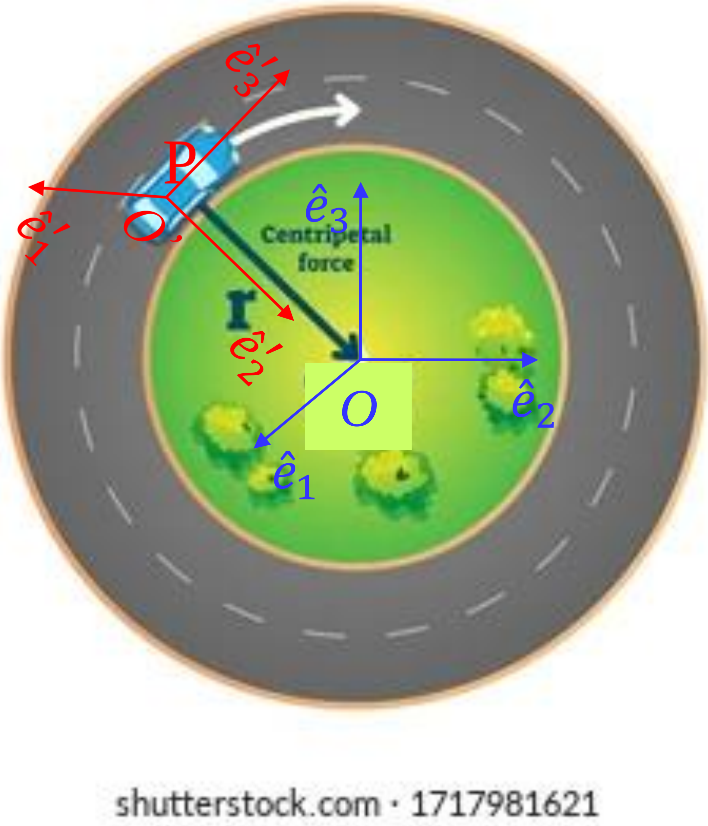
6.3 Ex.: voiture dans un virage

référentiel fixe R: $O\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{centripète} = F^{frot}\frac{\vec{r}}{r}$$

Force centripète due au frottement entre pneus et goudron

$$m\vec{a}_P = m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$



référentiel R' solidaire avec la voiture P: $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$

$$\vec{v}'_{O'} = 0 \qquad \vec{a}'_{O'} = 0 \qquad O' \equiv P\ \ (\overrightarrow{O'P} = 0)$$

$$m\vec{a}'_P = \sum\vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

$$m\vec{a}'_P = 0 = F^{frot}\frac{\vec{r}}{r} - \left(0 + m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r} + 0 + 0\right) \qquad \Longrightarrow \qquad F^{frot}\frac{\vec{r}}{r} + \left(-m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

L'observateur sur la voiture doit introduire une force $\vec{F}^{inertie} = -m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$ qui pousse vers l'extérieur du virage (*Force centrifuge*)

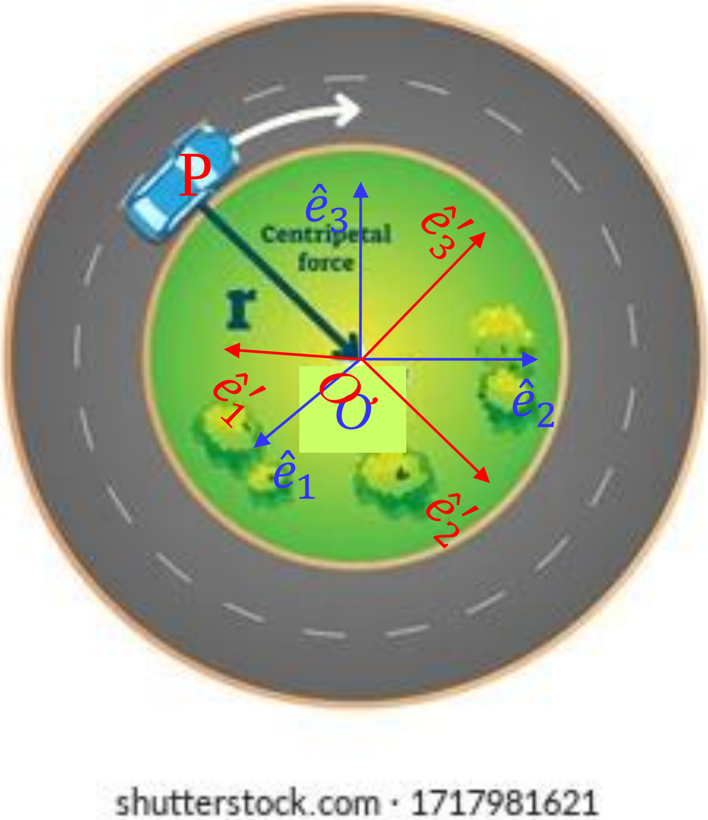
6.3 Ex.: voiture dans un virage

référentiel fixe R: $O\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{centripète} = N^{friction}\frac{\vec{r}}{r}$$

Force centripète due à la friction entre pneus et goudron

$$\vec{a}_P = \frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$



Référentiel R' en rotation avec la voiture P: $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$

$$\vec{v}'_{O'} = 0 \qquad \vec{a}'_{O'} = 0 \qquad \vec{v}'_P = 0 \qquad \overrightarrow{O'P} = \vec{r}$$

$$m\vec{a}'_P = \sum\vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

$$m\vec{a}'_P = 0 = N^{friction}\frac{\vec{r}}{r} - \left(0 + 0 + m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r} + 0\right)$$

L'observateur qui tourne doit introduire une force $\vec{F}^{inertie} = -m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$ qui pousse vers l'extérieur du virage

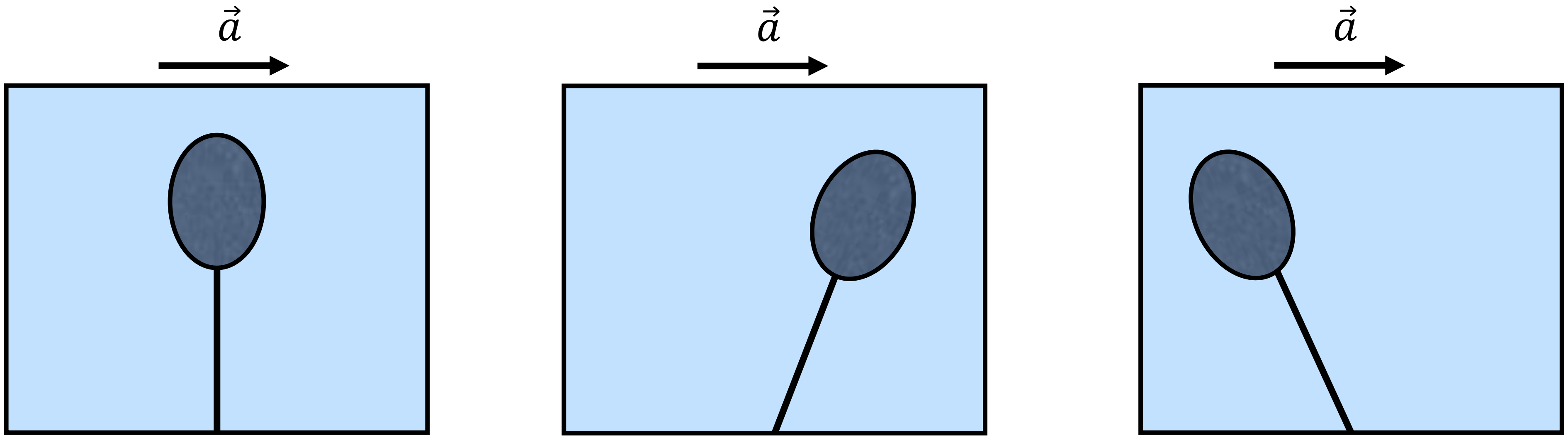
6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

Le support est soumis à une accélération linéaire.

Que fait le ballon?

Quiz?



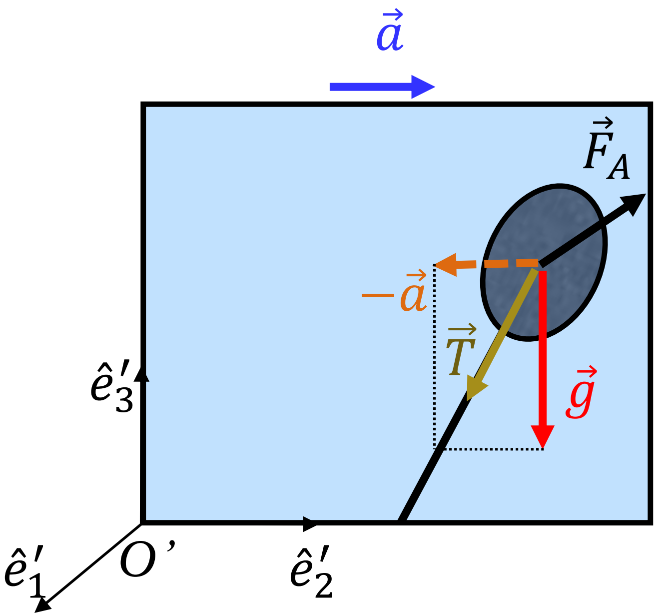
1) 2) 3)

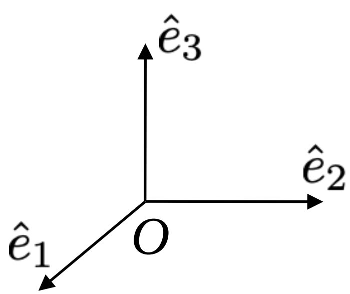
Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/230

6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération linéaire.
Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$





Dans le référentiel en mouvement:

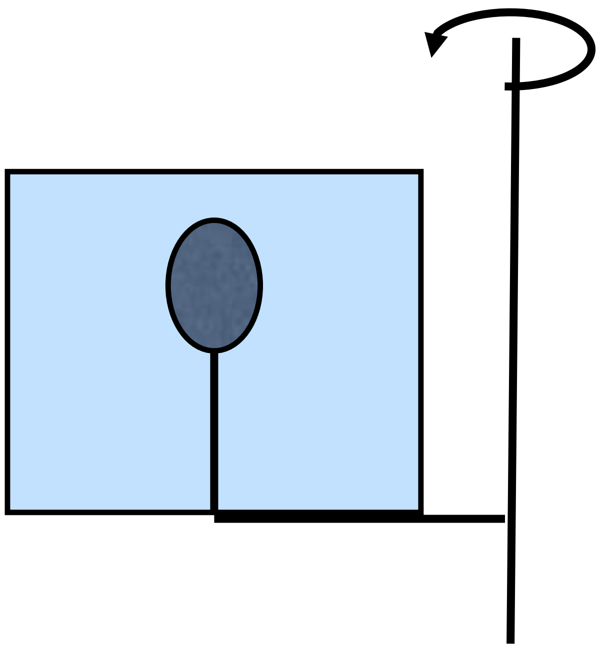
- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a} = 0$

$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

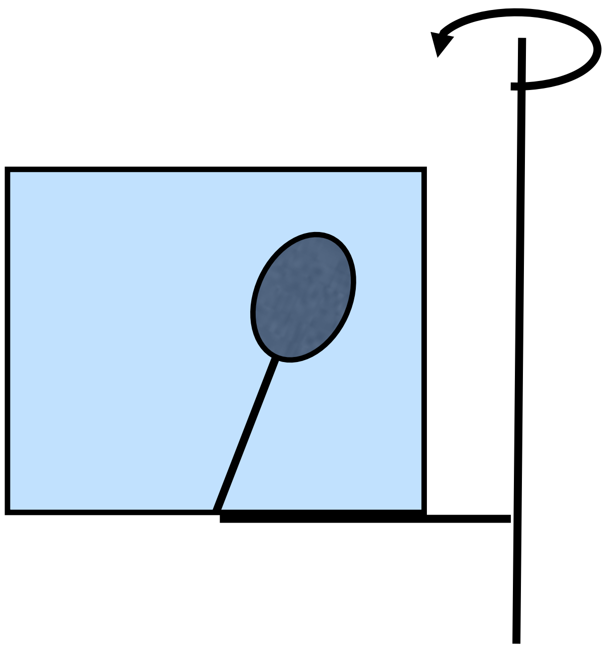
La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

6.3 Ex.: ballon d'hélium

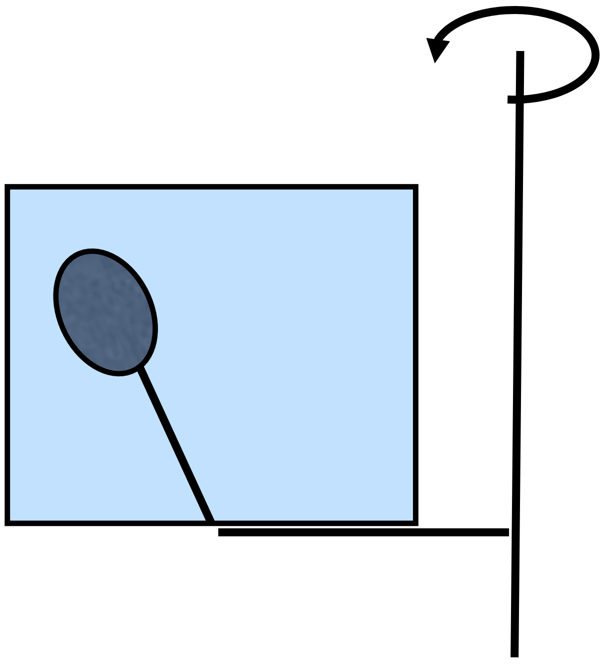
Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est mis en rotation.
Que fait le ballon?



1)



2)



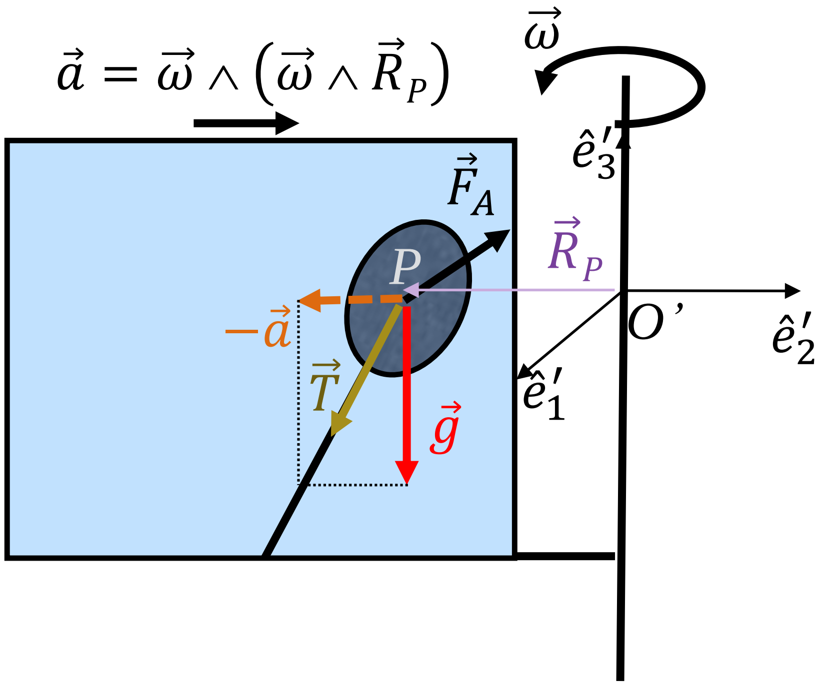
3)

6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

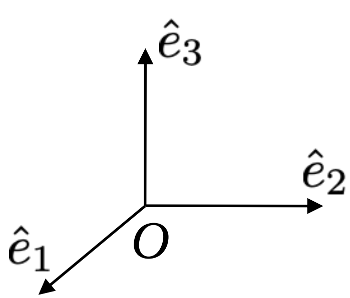
$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + \underbrace{m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}_{= m\vec{a}} + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_P\right)$



Dans le référentiel O' en rotation centré sur l'axe de rotation:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

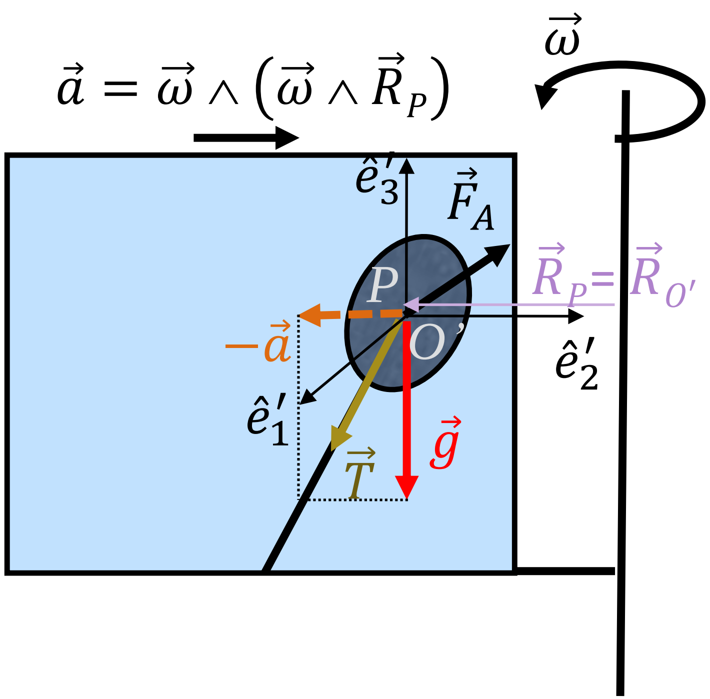
6.3 Ex.: ballon d’hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

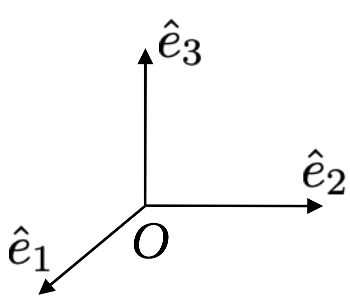
$$||$$

$$m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'}\right) = m\vec{a}$$



Dans le référentiel O’ en rotation centré sur le ballon P:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d’Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l’équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} = 0$



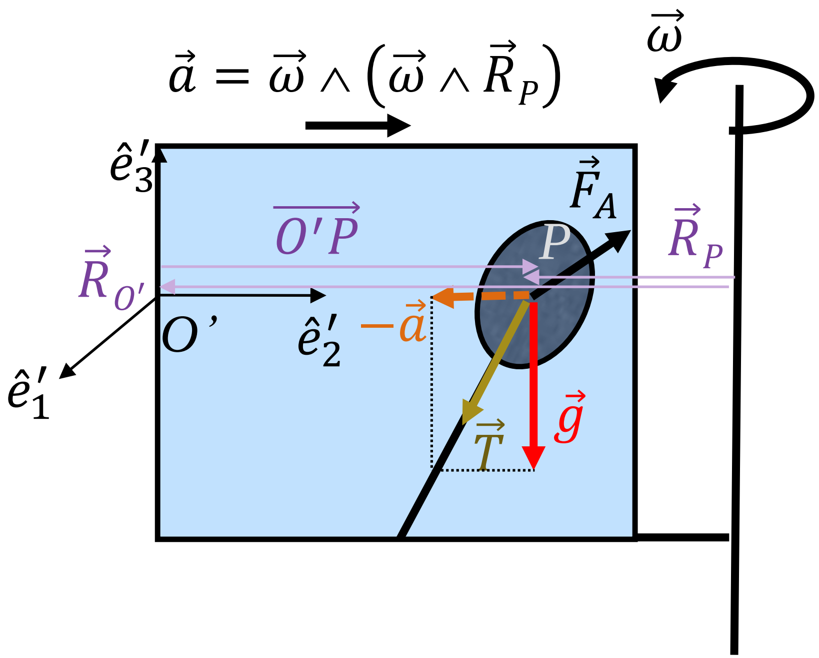
$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a}_{O'} - \vec{F}_A = m(-\vec{g}+\vec{a}) + M(\vec{g}-\vec{a}) = (M-m)(\vec{g}-\vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g}-\vec{a})$

6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

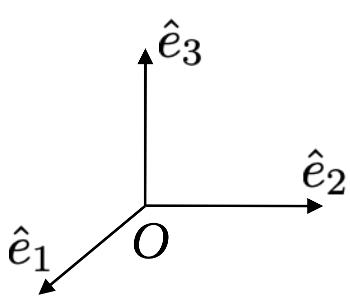
$$m\vec{a}'_P = \sum\vec{F}^{ext} - \Big(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + \underset{m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'})}{\underset{||}{m\vec{a}_{O'}}} + \underset{m\vec{a}_c}{\underset{||}{m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})}} + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\Big)$$



Dans le référentiel O' en rotation fixé au support:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} - m\vec{a}_c = 0$

$$m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}_c = m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'}) + m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}) =$$
$$m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(\vec{R}_{O'} + \overrightarrow{O'P})) = m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_P) = m\vec{a}$$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

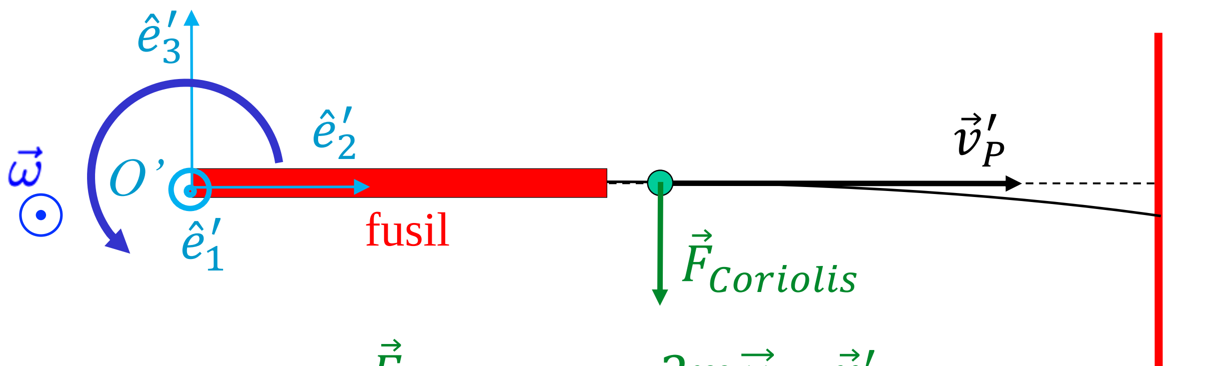
La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

6.3 Ex.: Force de Coriolis

Gaspar Coriolis
(1792–1843)

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

Fusil tournant vu de dessus
dans le référentiel du fusil :



$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

dévie la balle sur la droite

Dans le référentiel inertiel (à l'arrêt):
la balle suit un mouvement rectiligne uniforme, mais la cible est en train de tourner.
Le point d'impact se décale avec le temps